Simulation eines Multiple-Choice-Tests

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Bei dieser Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeit für mindestens vier richtige Antworten bei einem Multiple-Choice-Test berechnen, falls man zufällig ankreuzt. Da die Schülerinnen und Schüler die Formel von Bernoulli noch nicht kennen, erhalten sie das Ergebnis näherungsweise durch Simulation mit dem GTR.

Klassenstufe(n):
Klasse 8 bzw. 9

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- durch die Simulation mit dem GTR einen Näherungswert für eine Wahrscheinlichkeit bestimmen, die sie noch nicht exakt berechnen können;
- lernen eine Simulation mit Hilfe einer Tabellenkalkulation auch auf dem GTR zu erstellen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Die Klasse kann mit dem GTR Simulationen im *STAT*-Menü durchführen.
- Vorkenntnisse im Umgang mit einer Tabellenkalkulation sind hilfreich.

Zeitbedarf:
Eine Doppelstunde (90 Minuten)

Sonstige Materialien:

- Fragebogen mit acht fiktiven Fragen mit jeweils vier fiktiven Antwortmöglichkeiten, um im Vorfeld eine Simulation ohne GTR durchführen zu können.
- Lösungsfolie für den Fragebogen

Begleittext

Multiple-Choice-Tests begegnen Schülerinnen und Schülern in der Schule, etwa bei Vergleichsarbeiten (z. B. Vera oder DVA), aber auch im späteren Leben, z. B. bei der theoretischen Führerscheinprüfung. Weiterhin kennen die Schülerinnen und Schüler dieses Format auch aus Quizsendungen (Wer wird Millionär? usw.), bei denen auch schon der ein oder andere Kandidat durch Glück mit Raten gewinnen konnte. Die Frage, wie groß denn die Wahrscheinlichkeit sei, bei einem Multiple-Choice-Test durch Raten zu bestehen ist also sicherlich altersgemäß für Schülerinnen und Schüler der Klasse 8.

Beim Bestimmen dieser Wahrscheinlichkeit stoßen die Schülerinnen und Schüler sehr schnell an ihre Wissensgrenzen, denn in der Regel verfügen sie nicht über die Hilfsmittel aus der Kombinatorik. Die Schülerinnen und Schüler können jedoch bei der Simulation des Tests mit dem GTR erfahren, dass man mit technischen Hilfsmitteln zumindest gute Näherungswerte für Wahrscheinlichkeiten erhalten kann. Die Simulation wurde mit Hilfe der Tabellenkalkulation des GTR durchgeführt.

Aufgabenstellung

Aufgabe (Lambacher Schweizer 4, Baden-Württemberg / S. 167 / Aufgabe 2):

Bei einem Test gibt es acht Fragen mit jeweils vier Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Eine Versuchsperson kreuzt bei jeder Frage rein zufällig eine Antwort an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie trotzdem mindestens vier richtige Antworten?

HINWEIS:
Die Aufgabe wurde in der Klassestufe 8, nach der Behandlung der Pfadregel gestellt.

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen”, (K3) „Mathematisch modellieren“ und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen“ durch die vorliegende Simulation eingeübt.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse arbeitete bereits seit einem Jahr mit dem GTR und hatte schon mehrfach Simulationen im *STAT*-Menü durchgeführt.

Die Klasse hatte im ITG-Unterricht der Klasse 7 den Umgang mit einer Tabellenkalkulation (Excel) am PC gelernt. Mit dem GTR hatten die Schülerinnen und Schüler noch nicht mit der Tabellenkalkulation gearbeitet. Somit lernten sie anhand dieser Aufgabe mit dem GTR die Tabellenkalkulation zu nutzen.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe sollte in der Mathematikstunde gestellt werden, für eine Hausaufgabe ist sie weniger geeignet.

Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe aufgrund fehlender Kenntnisse aus der Kombinatorik in der Klassenstufe 8 nicht rechnerisch lösen. Mit Hilfe einer geeigneten Simulation und deren Auswertung im Klassenverband (um eine genügend große Anzahl an Simulationswerten zu erhalten) ist es jedoch möglich einen guten Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit anzugeben.

Eine Simulation mit Hilfe von Listen im *STAT*-Menü ist zwar prinzipiell möglich, aber wegen deren sehr komplizierten Auswertung nicht zu empfehlen. Da im Menü *S-Sheet* (Tabellenkalkulation) eine gewichtete Simulation zur Verfügung steht, ist die Tabellenkalkulation hier wesentlich besser geeignet. Da jedoch der Speicherplatz begrenzt und die Bildung von vielen Teilsummen (der Test besteht ja aus acht Fragen) sehr aufwendig ist, sollten sie den Test nur ca. 50-mal simulieren. Um dennoch einen guten Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, kumuliert man im Plenum alle Simulationsergebnisse der Schülerinnen und Schüler. Nachdem ein Näherungswert im Plenum bestimmt wurde, kann der Lehrer den Schülerinnen und Schüler den theoretisch berechneten Wert mitteilen, um die Güte des gemeinschaftlich erzielten Näherungswertes einschätzen zu können.

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler schon über Grundkenntnisse bezüglich einer Tabellenkalkulation (z. B. aus ITG) verfügen, muss das Erstellen einer Tabellenkalkulation mit dem GTR erklärt werden. Bevor man mit der Simulation beginnt, bietet es sich hier an, die Schülerinnen und Schüler zunächst eine Prognose für die gesuchte Wahrscheinlichkeit abgeben zu lassen. So kann man der Klasse aufzeigen, wie weit man bei solch einer Schätzung danebenliegen kann. Zudem ist es von Vorteil, wenn man jede Schülerin bzw. jeden Schüler, bevor die eigentliche Simulation mit dem GTR durchgeführt wird, einen solchen Test mit acht Fragen selbst ausfüllen lässt. Damit kein eventuelles Vorwissen einzelner Schülerinnen und Schüler eine Rolle spielt (Wer kreuzt in der Realität bei einen Multiple-Choice-Test komplett zufällig die Antworten an?) sollte es keine echten Fragen und Antworten, sondern nur Kästchen zum Ankreuzen geben. Man kann das Ankreuzen entweder mithilfe eines realen Tetraeders (vier Antwortmöglichkeiten) „auswürfeln“ lassen, oder man verwendet dazu den GTR (*RUN*-Menü). Anschließend legt der Lehrer die „Musterlösung“ (die er zuvor per Zufall bestimmt hat) als Folie auf den OHP. Die Schülerinnen und Schüler stellen dann selbst fest, wie viele Fragen sie richtig beantwortet haben.

HINWEIS:
Man kann dieselbe Aufgabe auch in der Klassenstufe 10 einsetzen, wenn man die Binomialverteilung behandelt. Dann kann zudem die Fragestellung gezielt erweitert werden, indem man z. B. die Verteilung für alle möglichen Anzahlen der zufällig richtig angekreuzten Antworten untersuchen lässt, oder umgekehrt fragt, ab wie vielen richtigen

Antworten man die Note „ausreichend“ erteilen sollte. Zudem können die Schülerinnen und Schüler dann die theoretischen Werte selbst berechnen.

Zeitbedarf

Für dieses Unterrichtsprojekt sollte man eine Doppelstunde einplanen. Der benötigte Zeitbedarf hängt nämlich stark davon ab, wie gut und schnell die Schülerinnen und Schüler mit der Tabellenkalkulation zurechtkommen.

Zur Rolle des GTR

Für die Simulation spielt der GTR natürlich die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz selbst eine Simulation mit $n = 50$ sehr zeitaufwendig wäre. Zudem kann der GTR den Einsatz eines realen Tetraeders ersetzen, wenn die Schülerinnen und Schüler einen solchen Test eigenhändig per Zufall ankreuzen.

Durchführung

Die Aufgabe wurde den Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Unterrichtsstunde vorgestellt. Zuerst wurden sie aufgefordert die gesuchte Wahrscheinlichkeit spontan zu schätzen. Daraufhin nannten die Klasse Werte zwischen 5 % und 50 %.

Anschließend wurde im Unterrichtsgespräch das eigentliche Problem der Aufgabenstellung herausgearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler erkannten schnell, dass ein Weg über ein konkretes Baumdiagramm praktisch nicht umsetzbar sei. Einige konnten zwar die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit genau vier richtigen Antworten angeben, aber bei der Frage nach der Anzahl der möglichen Pfade waren sie ratlos.

Um einen ersten Eindruck von der Größenordnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu erhalten, wurde den Schülerinnen und Schülern ein Multiple-Choice-Test mit acht „Fragen“ und je vier „Antwortmöglichkeiten“ ausgeteilt. Sie waren zunächst erstaunt und fanden es teilweise recht witzig, dass es gar keine echten Fragen und Antworten gab. Sie sahen aber rasch ein, dass echte Fragen nicht zufällig beantwortet werden. Die Schülerinnen und Schüler erzeugten im *RUN*-Menü natürliche Zufallszahlen (1, 2, 3 bzw. 4) und kreuzten gemäß der Anweisung auf dem Schülerblatt die Antworten an.

Nachdem der Lehrer die Musterlösung (Folie) mithilfe eines OHP an die Wand projiziert hatte, korrigierten die Schülerinnen und Schüler ihren Test. Anschließend wurde im Plenum festgestellt wie viele Schülerinnen und Schüler es mit keiner, einer, zwei, … usw. richtigen Antworten gab. Die Werte wurden in einer Tabelle an der Tafel zusammengefasst:

Anzahl der richtigen Antworten	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Schülerinnen und Schüler	4	7	5	4	3	1

Somit ergab sich als erster grober Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit von mindestens vier richtigen Antworten: $p = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$.

Danach wurde das Problem mit dem GTR (Tabellenkalkulation) simuliert. Der Lehrer führte mithilfe des „Managers" (Computer-Simulation des GTR) vor, wie man dieses Problem geschickt mit einer Tabellenkalkulation simulieren kann.

Jede Schülerin bzw. jeder Schüler simulierte den Test 50-mal und hielt die Ergebnisse (Anzahl der richtigen Antworten) mit Hilfe einer Strichliste fest. Anschließend wurden die Ergebnisse aller Schülerinnen und Schüler im Plenum in eine gemeinsame Strichliste übertragen. Der Test wurde somit insgesamt 1200-mal (24 Schülerinnen und Schüler) simuliert. Dabei ergab sich als neuer Näherungswert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{140}{1200} = \frac{7}{60} \approx 11{,}7\ \%$.

Einige benötigten trotz der ausführlichen Anleitung bei der Simulation den Rat von Mitschülern bzw. vom Lehrer.

Am Ende der Doppelstunde teilte der Lehrer den Schülerinnen und Schülern noch den theoretischen Wert ($p \approx 11{,}4\ \%$) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit, um die Güte der Simulation besser würdigen zu können.

Hinweis zur Berechnung des theoretischen Werts (für die 10. Klasse):
Es liegt eine Binomialverteilung $B_{8;0,25}$ vor. Wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der richtigen Antworten ist, dann ist Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$ gesucht.

Mit Hilfe des GTR berechnet man den Wert wie folgt:

CASIO 9860: $1 - Bcd(3{,}8{,}0.25) \approx 0{,}1138$;

CASIO CG50: $Bcd(4{,}8{,}8{,}0.25) \approx 0{,}1138$.

(Man muss mit dem CG50 nicht über das Gegenereignis gehen.)

Mathematik Klasse 8 (AP)

„Beantworte“ die folgenden acht Fragen mit Hilfe von Zufallszahlen deines GTR wie folgt:

Kommt eine 1, dann kreuze Antwort a) an.

Kommt eine 2, dann kreuze Antwort b) an.

Kommt eine 3, dann kreuze Antwort c) an.

Kommt eine 4, dann kreuze Antwort d) an.

Frage 1	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 2	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 3	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 4	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 5	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 6	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 7	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 8	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐

Vergleiche deine „Antworten“ mit der Musterlösung und stelle fest, wie viele richtige „Antworten“ du hast.

Anzahl der richtigen „Antworten“: ___________

Mathematik Klasse 8 (AP)

Lösungen: Multiple-Choice-Test

Frage 1	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☒	**d)** ☐
Frage 2	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☒
Frage 3	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☒
Frage 4	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☒	**d)** ☐
Frage 5	**a)** ☐	**b)** ☒	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 6	**a)** ☐	**b)** ☐	**c)** ☒	**d)** ☐
Frage 7	**a)** ☒	**b)** ☐	**c)** ☐	**d)** ☐
Frage 8	**a)** ☐	**b)** ☒	**c)** ☐	**d)** ☐

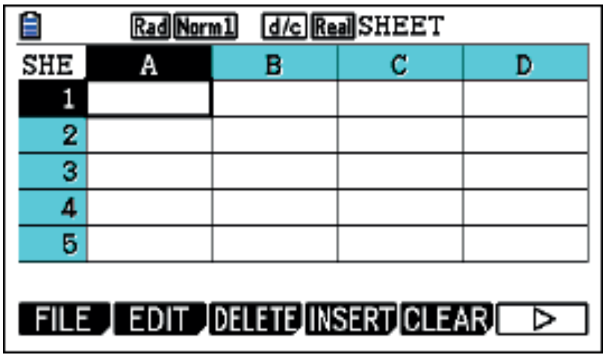
Lösungsvorschlag: Simulation mit Hilfe der Tabellenkalkulation

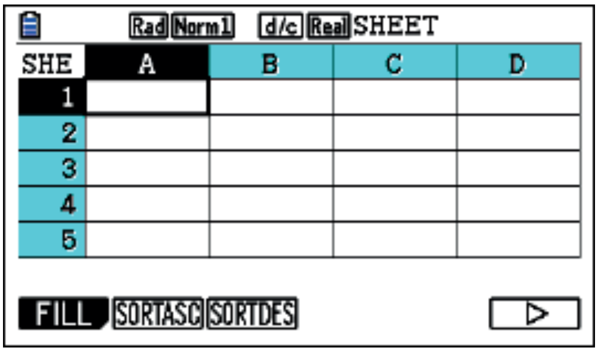
1) Zuerst wird über **w(EDIT)** und **u(▷)** der Befehl **q(FILL)** aktiviert und dann die Formel zur Erzeugung der Zufallszahlen **mit dem Gleichheitszeichen** eingegeben.

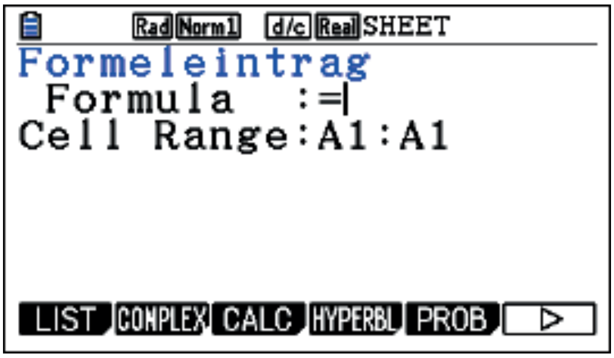
Die Zufallszahlen werden in Spalte A wie folgt erzeugt: Man verwendet den Befehl $Ran\#\leq p$. Dieser Befehl erzeugt:

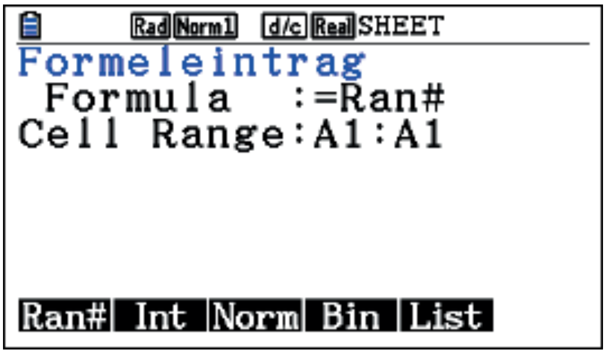
- Eine 0, falls $Ran\# > p$ ist. (0 bedeutet: Antwort ist falsch)
- Eine 1, falls $Ran\#\leq p$ ist. (1 bedeutet: Antwort ist richtig)

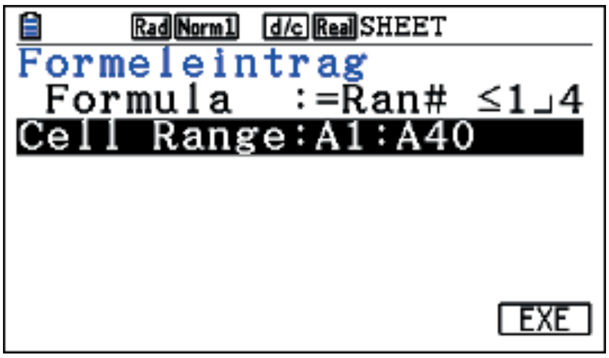
Für diese Simulation wählt man $p = 0{,}25$.
q(Ran#) findet man unter: **iy(PROB) r(RAND)**
Das Zeichen ≤ findet man im Untermenü **y(REL),**
Den *Cell-Range* stellt man auf $A1$: $A40$ ein, um fünf Achterblöcke auf einmal simulieren zu können.

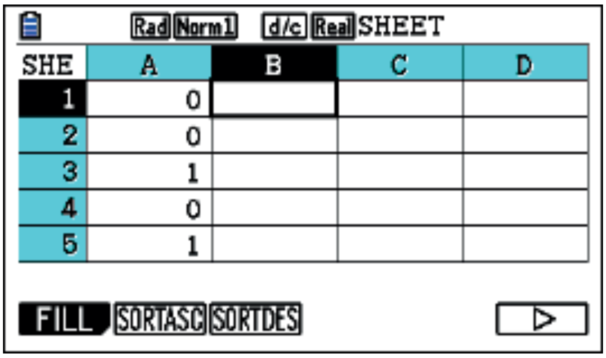




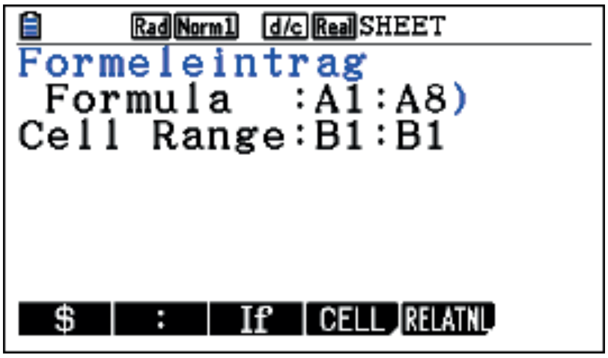


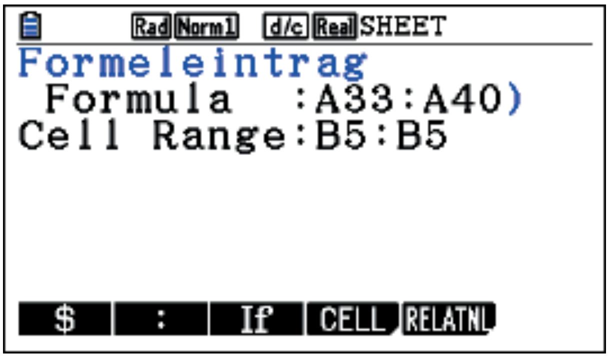


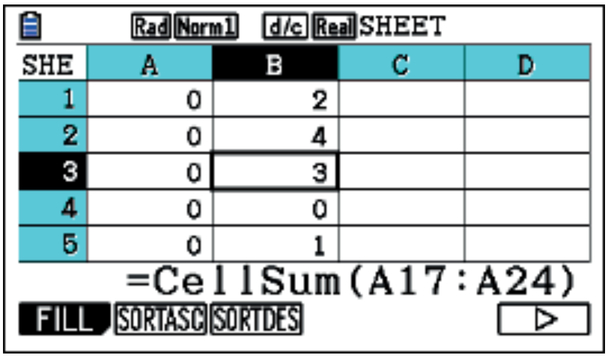




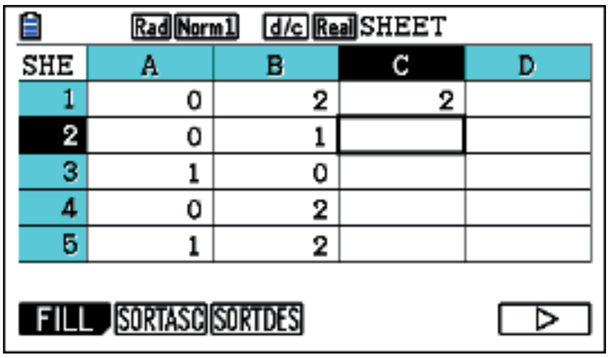
2) Um die Anzahl der Einser in den Achterblöcken bestimmen zu können, verwendet man den Befehl *Cellsum*, den man wie folgt findet: **r(CEL) y(Sum)**
   - In der Zelle B1 wird die Teilsumme der Zellen A1 bis A8 berechnet.
   - In der Zelle B2 wird die Teilsumme der Zellen A9 bis A16 berechnet usw.
   - In den Zellen B1 bis B5 steht also die Anzahl der richtigen Antworten von fünf Simulationen. (Man wählt diese Fünferblocks um unnötiges Scrollen zu vermeiden.)

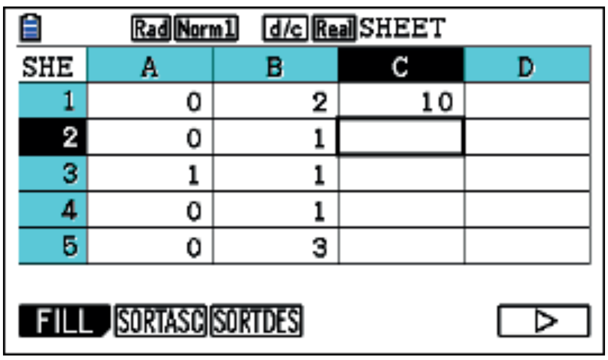






3) Jetzt kann man sehr schnell immer fünf neue Werte erhalten, indem man die Simulation erneut startet, z. B. dadurch, dass man in eine freie Zelle eine Zahl eintippt. Es bietet sich an jeweils die Nummer des aktuellen Fünferblocks einzutippen, dann weiß man wie oft man die Simulation schon wiederholt hat. Man beginnt also mit der Zahl 2 und endet mit der Zahl 10. Dann hat man zehn Fünferblöcke, also 50 Werte.





Jede Schülerin und jeder Schüler simuliert den Test 50-mal und hält die Ergebnisse (Anzahl der richtigen Antworten) mit Hilfe einer Strichliste fest. Anschließend wurden die Ergebnisse der Klasse im Plenum in eine gemeinsame Strichliste übertragen. Der Test wurde somit 1200-mal (24 Schülerinnen und Schüler) simuliert.